FONCTIONS

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. DÉFINITION

DÉFINITION

On appelle fonction numérique toute application de $\mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$.

Les fonctions sont usuellement notées à l'aide des lettres f, g, h, φ, ψ, etc. L'image du réel x par la fonction f est notée $f(x)$. Il convient de ne pas confondre la fonction f (le procédé) et l'image $f(x)$ (le résultat, qui est un réel).

1.2. ENSEMBLE DE DÉFINITION

Lorsque la fonction f est une application d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, seuls les réels de A ont une image par f ; on dit que A est l'ensemble de définition de f, et on écrit : $\mathrm{A} = \mathcal{D}(f)$.

Le plus souvent, la fonction f est donnée par une "formule" permettant d'obtenir $f(x)$; l'ensemble de définition, s'il n'est pas précisé dans l'énoncé, est alors l'ensemble des réels x pour lesquels le calcul de $f(x)$ est possible, c'est-à-dire l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ a un sens.

Si $\mathrm{A}(x)$ est une expression intervenant dans le calcul de $f(x)$, le lecteur retiendra que :

- $\dfrac{1}{\mathrm{A}(x)}$ n'a de sens qu'à la condition : $\mathrm{A}(x) \neq 0$.
- $\sqrt{\mathrm{A}(x)}$ n'a de sens qu'à la condition : $\mathrm{A}(x) \geqslant 0$.
- $\ln(\mathrm{A}(x))$ n'a de sens qu'à la condition : $\mathrm{A}(x) > 0$.
- $(\mathrm{A}(x))^{\alpha}$, où α est un réel, n'a de sens qu'à la condition : $\mathrm{A}(x) > 0$.

$\mathcal{D}(f)$ est en général une réunion d'intervalles ; l'étude de f se fera donc sur chacun de ces intervalles.

1.3. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

On appelle représentation graphique de la fonction f dans le repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation $y = f(x)$; c'est donc l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x, f(x))$, ou encore la courbe d'équation $y = f(x)$.

Ainsi, les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ sont-elles, dans tout repère (orthonormé ou non), représentées par des droites, les fonctions polynômes du second degré par des paraboles, et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ par une hyperbole.

Dans la pratique, on choisit d'ordinaire un repère orthonormé ou rectangulaire.

1.4. VARIATION

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.
- **On dit que la fonction f est constante sur I lorsque, pour tout couple (x, y) d'éléments de I, on a : $f(x) = f(y)$.**
- **On dit que la fonction f est croissante sur I lorsque, pour tout couple (x, y) d'éléments de I, on a : $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.**
- **On dit que la fonction f est décroissante sur I lorsque, pour tout couple (x, y) d'éléments de I, on a : $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.**
- **On dit que la fonction f est strictement croissante sur I lorsque, pour tout couple (x, y) d'éléments de I, on a : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.**
- **On dit que la fonction f est strictement décroissante sur I lorsque, pour tout couple (x, y) d'éléments de I, on a : $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.**

• On dit que la fonction f est strictement monotone sur I lorsqu'elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Par exemple, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$; elle est également décroissante sur $]-\infty,0[$.

On observera que, dans bien des cas, le sens de variation d'une fonction peut s'obtenir sans calcul de dérivée. Ainsi, une somme de fonctions croissantes (resp. décroissantes) sur un même intervalle I est nécessairement croissante (resp. décroissante) sur I ; un produit de fonctions croissantes (resp. décroissantes) et positives sur I est nécessairement croissant (resp. décroissant) sur I.
Le tableau suivant donne le sens de variation de $g \circ f$ selon ceux de f et de g :

variation de f	variation de g	variation de $g \circ f$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En voici un exemple d'utilisation :
la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ peut s'écrire $f = inv \circ rac \circ pol$, où :
• la fonction du second degré pol définie sur $]1,+\infty[$ par $pol(x) = x^2 - 1$ croît sur cet intervalle ;
• la fonction rac définie sur $]0,+\infty[$ par $rac(x) = \sqrt{x}$ croît sur cet intervalle ;
• la fonction inv définie sur $]0,+\infty[$ par $inv(x) = \dfrac{1}{x}$ décroît sur cet intervalle.
Il en résulte que la fonction f est décroissante sur $]1,+\infty[$.

1.5. FONCTIONS PAIRES, IMPAIRES, PÉRIODIQUES

DÉFINITION

Soit f une fonction numérique.
• On dit que f est paire lorsque, pour tout réel x de $\mathcal{D}(f)$, on a :

$$-x \in \mathcal{D}(f) \text{ et } f(-x) = f(x).$$

• On dit que f est impaire lorsque, pour tout réel x de $\mathcal{D}(f)$, on a :

$$-x \in \mathcal{D}(f) \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

Les fonctions polynômes dont tous les termes sont de degré pair (resp. impair) sont paires (resp. impaires) ; les fonctions sinus et tangente sont impaires, la fonction cosinus est paire, comme la fonction valeur absolue. Dans un cas comme dans l'autre, on peut se contenter d'étudier la restriction de la fonction à $[0,+\infty[\cap \mathcal{D}(f)$; on complétera ensuite la représentation graphique obtenue par une symétrie d'axe (Oy) si f est paire, ou de centre O si f est impaire.

DÉFINITION

Soit f une fonction numérique.
On dit que f est périodique lorsqu'il existe un réel non nul t tel que, pour tout réel x de $\mathcal{D}(f)$, on a :

$$x + t \in \mathcal{D}(f),\ x - t \in \mathcal{D}(f) \text{ et } f(x+t) = f(x).$$

On dit alors que le réel t est une période de f.

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π, la fonction tangente est périodique de période π. La fonction $x \mapsto x - [x]$ (partie décimale) est périodique de période 1.

Si f est périodique de période t, on se contente d'étudier la restriction de f à n'importe quel intervalle d'amplitude t ; on choisit en général $[0,t]$, ou $[-\frac{t}{2};\frac{t}{2}]$, ce dernier s'avérant préférable lorsque f est de surcroît paire ou impaire (on peut alors se limiter à $[0;\frac{t}{2}]$).

1.6. FONCTIONS MINORÉES, MAJORÉES, BORNÉES

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.
• On dit que la fonction f est minorée sur I lorsqu'il existe un réel m tel que, pour tout x de I, on a : $f(x) \geqslant m$.
• On dit que la fonction f est majorée sur I lorsqu'il existe un réel M tel que, pour tout x de I, on a : $f(x) \leqslant \mathrm{M}$.
• On dit que la fonction f est bornée sur I lorsqu'il existe un réel positif M tel que, pour tout x de I, on a : $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}$.

f est donc bornée sur I si, et seulement si, elle est à la fois minorée et majorée sur I. Les fonctions sinus et cosinus vérifient : $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$; elles sont donc bornées sur $\mathbb{R}$, et un sinus ou un cosinus est toujours, en valeur absolue, inférieur ou égal à 1.

2. LIMITES

2.1. DÉFINITIONS

Pour les définitions, on se reportera au cours de première année. On retiendra l'idée suivante, qui est souvent utile : l'assertion $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ est équivalente à :

• quels que soient les réels a et b tels que $a < \ell < b$, il existe un"degré de proximité" de x_0 pour lequel on a : $a < f(x) < b$;

ou, plus précisément :

• quels que soient les réels a et b tels que $a < \ell < b$, il existe un réel strictement positif α tel que, dès que : $|x - x_0| < \alpha$, alors : $a < f(x) < b$.

Ainsi l'assertion $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ permet-elle (par exemple) d'affirmer qu'à coup sûr, lorsque le réel x est assez "grand", on a : $f(x) > 0$. On aurait pu en dire autant à partir de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2.2. THÉORÈMES GÉNÉRAUX

Le tableau suivant résume les théorèmes "généraux" sur les limites, qu'il convient de maîtriser parfaitement ; les cases gris foncé correspondent aux fameuses formes indéterminées ; les cases gris clair concernent deux cas pour lesquels, sans plus ample précision, il n'est pas possible de conclure.

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x) + g(x))$	$\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x) - g(x))$	$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)g(x)$	$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\ell + \ell'$	$\ell - \ell'$	$\ell\ell'$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
$\ell \in \mathbb{R}$	0	ℓ	ℓ	0	
$\ell \in \mathbb{R}$ $\ell > 0$ $\ell < 0$ $\ell = 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	 $+\infty$ $-\infty$ 	0
0	0	0	0	0	
$+\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$ $\ell' > 0$ $\ell' < 0$ $\ell' = 0$	$+\infty$	$+\infty$	 $+\infty$ $-\infty$ 	 $+\infty$ $-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	
$+\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$	

3. CONTINUITÉ

3.1. DÉFINITION

DÉFINITION

Soit f une fonction, et x_0 un élément de son ensemble de définition. On dit que f est continue en x_0 lorsque : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Les figures 5 et 9 ci-après représentent chacune une fonction f continue en x_0 (et au voisinage de ce point). On observera qu'on peut en tracer la représentation graphique "sans avoir à lever la main".

Lorsqu'on a $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$), on dit que f est continue à gauche (resp. à droite) en x_0 ; c'est le cas de la fonction f des figures 2 et 5 (resp. 3, 5 et 9).

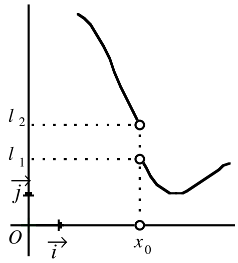


figure 1
l_1 est limite à droite en x_0
l_2 est limite à gauche en x_0
Il n'y a pas de limite en x_0
f n'est pas continue en x_0

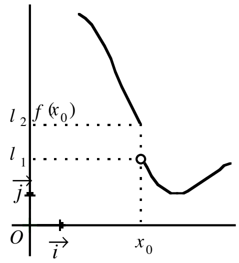


figure 2
l_1 est limite à droite en x_0
l_2=$f(x_0)$ est limite à gauche en x_0
Il n'y a pas de limite en x_0,
mais f est continue à gauche en x_0

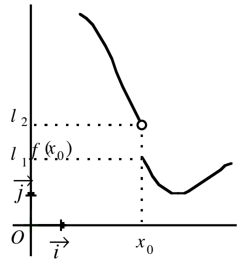


figure 3
l_1=$f(x_0)$ est limite à droite en x_0
l_2 est limite à gauche en x_0
Il n'y a pas de limite en x_0,
mais f est continue à droite en x_0

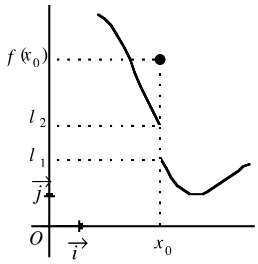


figure 4
l_1 est limite à droite en x_0
l_2 est limite à gauche en x_0
Il n'y a pas de limite en x_0
f n'est pas continue en x_0

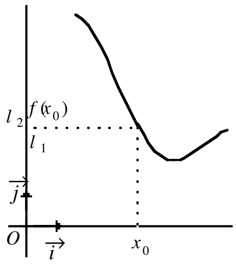


figure 5
l_1 est limite à droite en x_0
l_2 est limite à gauche en x_0
l_1=l_2=$f(x_0)$ est limite en x_0
f est continue en x_0

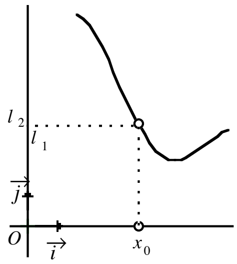


figure 6
l_1 est limite à droite en x_0
l_2 est limite à gauche en x_0
l_1=l_2 est limite en x_0
f est prolongeable par continuité en x_0

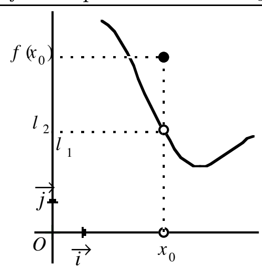


figure 7
l_1 est limite à droite en x_0
l_2 est limite à gauche en x_0
l_1=l_2≠$f(x_0)$: pas de limite en x_0
f n'est pas continue en x_0

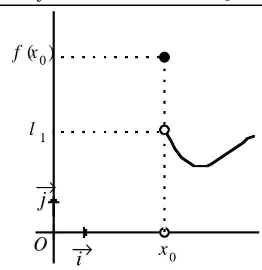


figure 8
l_1 est limite à droite en x_0
l_1≠$f(x_0)$
Il n'y a pas de limite en x_0
f n'est pas continue en x_0

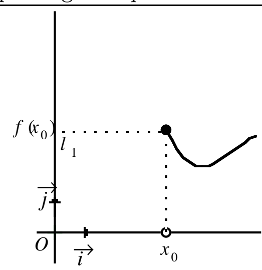


figure 9
l_1 est limite à droite en x_0
l_1=$f(x_0)$ est la limite en x_0
f est continue en x_0

Prolongement par continuité. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, sauf en un point x_0 de I ; si $f(x)$ admet la limite finie ℓ en x_0, on dit que f est prolongeable par continuité en x_0, et on appelle prolongement par continuité de f en x_0 la fonction ψ définie par :

$$\psi(x) = f(x) \text{ si } x \neq x_0 \qquad \text{et} \qquad \psi(x_0) = \ell \qquad \text{(figure 6).}$$

ψ est bien évidemment continue en x_0 ; dans la pratique, on écrira souvent qu'on prolonge f en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$, ce qui permet de noter de la même façon f et son prolongement.

Continuité sur un intervalle. Lorsqu'une fonction est continue en tout point d'un intervalle I, on dit qu'elle est continue sur I.

Discontinuité. Une fonction f qui n'est pas continue en un point présente une discontinuité en ce point ; bien qu'il existe des fonctions discontinues en tout point de leur ensemble de définition, les fonctions que nous utiliserons auront, le plus souvent, un nombre fini de points de discontinuité (0 est un nombre fini !).

Lorsqu'une fonction possède une limite à droite en x_0, une limite à gauche en x_0, et que l'une d'elles au moins diffère de $f(x_0)$, on parle de **discontinuité de première espèce** (figures 2, 3, 4, 7 et 8).

Il se peut aussi que la limite à droite ou la limite à gauche (voire les deux) soient infinies ou n'existent pas (discontinuité de deuxième espèce).

3.2. CONTINUITÉ DES FONCTIONS CLASSIQUES

Grâce aux théorèmes généraux sur les limites, on peut affirmer que, si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, alors il en va de même des fonctions $f+g$, $f-g$, fg, λf (pour tout réel λ) ; sous les mêmes hypothèses, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur tout intervalle où elle est définie. Enfin, si f est continue sur l'intervalle I, et si g est continue sur $f\langle \mathrm{I} \rangle$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Comme les fonctions constantes, et l'application identique $x \mapsto x$ sont trivialement continues sur $\mathbb{R}$, il en résulte aisément que :
- les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$;
- les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle où elles sont définies.

On montre par ailleurs que les fonctions sinus, cosinus et exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$; que la fonction racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$, la fonction logarithme népérien sur $]0, +\infty[$, et la fonction tangente sur tout intervalle de la forme $]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Les fonctions classiques sont donc toutes continues, à la seule et notable exception de la fonction **partie entière**, qui présente une discontinuité de première espèce en tout point entier (elle y est continue à droite et discontinue à gauche).

3.3. LES GRANDS THÉORÈMES

THÉORÈME

Si f est une fonction continue sur l'intervalle I, alors l'ensemble $f\langle \mathrm{I} \rangle$ est lui-même un intervalle.

On résume ce théorème par la phrase *"l'image continue d'un intervalle est un intervalle"*. Par exemple, l'image de l'intervalle ouvert $]-2, 2[$ par l'application $x \mapsto x^2$ est l'intervalle $[0, 4[$, qui n'est ni ouvert ni fermé - ce qui prouve que I et $f\langle \mathrm{I} \rangle$ ne sont en général pas de même "nature" ; cependant :

THÉORÈME

Si f est une fonction continue sur le segment $\mathrm{I} = [a, b]$, alors l'ensemble $f\langle \mathrm{I} \rangle$ est lui-même un segment.

Ainsi l'image du segment $[-2, 2]$ par l'application $x \mapsto x^2$ est le segment $[0, 4]$, ce qui prouve que l'image de $[a, b]$ n'est pas, en général, le segment $[f(a), f(b)]$, mais un segment $[m, \mathrm{M}]$, où m et M désignent respectivement les bornes inférieure et supérieure de f sur le segment $[a, b]$. On peut ainsi résumer le théorème précédent par la phrase : *"toute fonction continue sur un segment y est bornée et y atteint ses bornes"*.

Une conséquence importante du premier théorème est le célèbre *théorème des valeurs intermédiaires* :

THÉORÈME

Si f est une fonction continue sur le segment $\mathrm{I} = [a, b]$, alors, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel x de $[a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Ainsi, l'équation $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ a au moins une solution dans $[-4, 0]$ car, si on pose $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, la fonction polynôme f est continue sur $[-4, 0]$, et on a $f(-4) = -6$ et $f(0) = 6$; le lecteur vérifiera qu'il y a exactement trois solutions dans cet intervalle : -3, -2 et -1. Le théorème des valeurs intermédiaires permet donc de prouver l'existence, mais non l'unicité, de la solution d'une équation. Le théorème dit *de la bijection* atteint ces deux objectifs :

THÉORÈME

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I, alors la restriction de f à l'intervalle I est une bijection de I sur l'intervalle $f\langle \mathrm{I}\rangle$.

Notons que, dans ce cas, grâce à la monotonie de f, les intervalles I et $f\langle \mathrm{I}\rangle$ sont de même nature, comme dans les exemples suivants :

Intervalle I	$f\langle \mathrm{I}\rangle$ si f croît strictement	$f\langle \mathrm{I}\rangle$ si f décroît strictement
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b[$	$]f(a), f(b)[$	$]f(b), f(a)[$
$[a, +\infty[$	$[f(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(a)]$
$]-\infty, +\infty[$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

Bijection réciproque

Sous les hypothèses du théorème précédent, la bijection réciproque f^{-1} est définie sur l'intervalle $f\langle \mathrm{I}\rangle$, elle est strictement monotone (de *même sens* que f) et continue sur cet intervalle ; enfin, les représentations graphiques de f et de f^{-1} sont, en repère orthonormé, symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Couples célèbres

• La fonction logarithme népérien (la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1) est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$; c'est donc une bijection de cet intervalle sur l'intervalle image

$$]\lim_{x\to 0} \ln x, \lim_{x\to+\infty} \ln x[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

La bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}$, c'est la fonction exponentielle.

• La fonction puissance d'exposant entier non nul pair (resp. impair) n est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, +\infty[$) ; c'est donc une bijection de cet intervalle sur l'intervalle image $[0, \lim\limits_{x\to+\infty} x^n[= [0, +\infty[= \mathbb{R}^+$ (resp. $]\lim\limits_{x\to-\infty} x^n, \lim\limits_{x\to+\infty} x^n[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$). La bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}$), c'est la fonction racine n-ième.

4. DÉRIVABILITÉ

4.1. DÉFINITION

DÉFINITION

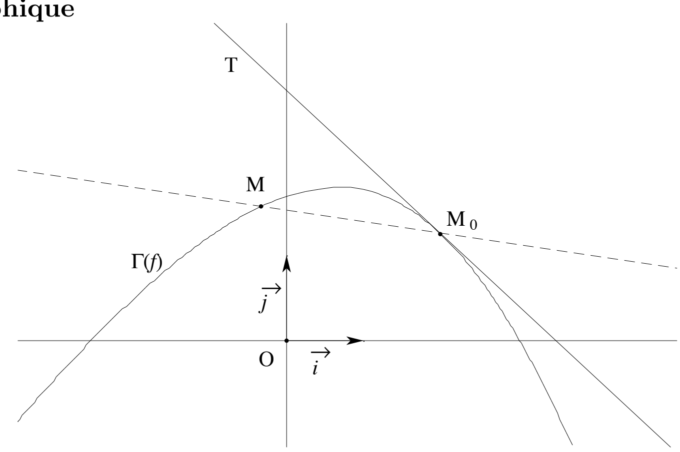
Soit f une fonction, et x_0 un élément de son ensemble de définition. Lorsque le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie ℓ quand x tend vers x_0, on dit que la fonction f est dérivable en x_0.

La limite ℓ du théorème est appelée *nombre dérivé* de f en x_0, et notée $f'(x_0)$.

THÉORÈME

Si une fonction f est dérivable en un point x_0, alors f est continue en x_0.

Interprétation graphique



Soient M et M_0 les points de coordonnées respectives $(x, f(x))$ et $(x_0, f(x_0))$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Le réel $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ n'est autre que le coefficient directeur de la droite (MM_0), qui est sécante à la représentation graphique $\Gamma(f)$ de la fonction f. Lorsque x tend vers x_0, le point M "tend vers" M_0, et la droite (MM_0) admet une "position-limite" qui est celle de la droite T tangente à $\Gamma(f)$ en M_0. Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est donc le coefficient directeur de la droite T.

Il en résulte qu'une équation de la tangente $\Gamma(f)$ en M_0 est :

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Non-dérivabilité
La fonction f n'est pas dérivable en x_0 lorsque le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ n'admet pas une limite finie quand x tend vers x_0 ; ceci se produit dans les cas suivants :

• le rapport admet une limite infinie quand x tend vers x_0 ; dans ce cas, bien que la fonction ne soit pas dérivable en x_0, sa représentation graphique $\Gamma(f)$ admet, au point M_0, une tangente *verticale*. Exemple : la fonction racine carrée en 0.

• le rapport admet, quand x tend vers x_0, une limite à gauche ℓ_g, une limite à droite ℓ_d, et celles-ci sont différentes ($\ell_g \neq \ell_d$, l'une des deux pouvant être infinie) ; dans ce cas, la représentation graphique de f admet, en M_0, deux demi-tangentes de pentes différentes. Exemple : la fonction valeur absolue en 0.

• le rapport n'admet, quand x tend vers x_0, aucune limite, finie ou infinie ; ce cas n'apparaît jamais avec les fonctions"habituelles".

Dérivabilité sur un intervalle
Lorsqu'une fonction f est dérivable en tout point d'un intervalle I, on dit qu'elle est *dérivable sur* I. La fonction définie alors sur l'intervalle I par : $x \mapsto f'(x)$ est notée f' et appelée **fonction dérivée** de f sur I.

4.2. DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS CLASSIQUES

Grâce aux théorèmes généraux sur les limites, on peut affirmer que, si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors il en va de même des fonctions $f + g$, $f - g$, fg, λf (pour tout réel λ) ; sous les mêmes hypothèses, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur tout sous-intervalle de I où elle est définie. Les dérivées de ces diverses fonctions s'obtiennent à l'aide des célèbres formules :

$$\begin{aligned}
(f+g)' &= f' + g' \\
(f-g)' &= f' - g' \\
(\lambda f)' &= \lambda f' \\
(fg)' &= f'g + fg' \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}
\end{aligned}$$

Comme les fonctions constantes, et l'application identique $x \mapsto x$ sont trivialement dérivables sur $\mathbb{R}$, il en résulte aisément que :

- les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$;
- les fonctions rationnelles sont dérivables sur chaque intervalle où elles sont définies.

On montre par ailleurs que les fonctions sinus, cosinus et exponentielle sont dérivables sur $\mathbb{R}$; que la fonction racine carrée est dérivable sur $]0,+\infty[$, la fonction logarithme népérien sur $]0,+\infty[$, et la fonction tangente sur tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Les dérivées des fonctions classiques sont rappelées dans le tableau ci-après :

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle	Conditions
x^n	nx^{n-1}	$\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathrm{I} \subset \mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{Z}^*_-$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathrm{I} \subset \mathbb{R}^*$	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathrm{I} \subset \mathbb{R}^*_+$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{I} \subset \mathbb{R}^*_+$	
e^x	e^x	$\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$	
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$	
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$\mathrm{I} \subset]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$

Les fonctions classiques sont donc (presque) toutes dérivables partout où elles sont définies ; les seules qui posent problème sont la fonction **racine carrée** et la fonction **valeur absolue** : aucune des deux n'est dérivable en 0.

Une étude particulière est donc nécessaire pour établir la dérivabilité (ou la non-dérivabilité) des expressions de la forme :

- $\sqrt{\mathrm{A}(x)}$ partout où $\mathrm{A}(x)=0$;
- $|\mathrm{A}(x)|$ partout où $\mathrm{A}(x)=0$.

Exemple
La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^4+x^5}$ est définie sur $\mathrm{I}=[-1,+\infty[$; comme x^4+x^5 s'annule pour $x=-1$ ou $x=0$, les théorèmes généraux permettent d'affirmer que f est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$, mais ils ne donnent aucune réponse quant à la dérivabilité de f en -1 ni 0. On calcule donc les rapports :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{x^4+x^5}}{x}=x\sqrt{1+x} \quad \text{et :} \quad \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{\sqrt{x^4+x^5}}{x+1}=\sqrt{\frac{x^4}{x+1}}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ et : $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$.
f est donc dérivable en 0, mais pas en -1.

La méthode exposée dans l'exemple ci-dessus consiste, en appliquant la définition de la dérivabilité de f en x_0, à rechercher la limite du taux de variation de f en x_0 ; c'est en général le moyen le plus simple d'arriver à la réponse, mais il est parfois aussi aisé de chercher la limite de $f'(x)$ en x_0, ce que précise le théorème suivant :

THÉORÈME

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et soit x_0 un point de I. On suppose que f est dérivable en tout point x de I différent de x_0. Dès lors :
• Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ell$, alors f est dérivable en x_0, et $f'(x_0) = \ell$.
• Si $f'(x)$ admet une limite infinie en x_0, alors f n'est pas dérivable en x_0, mais sa représentation graphique admet en ce point une tangente verticale.

En d'autres termes, si $f'(x)$ admet en x_0 une limite finie ou infinie, alors le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet la même limite en ce point.

4.3. DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS COMPOSÉES

Si u est dérivable sur l'intervalle I, et si f est dérivable sur l'intervalle $u\langle \mathrm{I} \rangle$, alors $f \circ u$ est dérivable sur I, et sa fonction dérivée s'obtient par la formule :

$$\boxed{(f \circ u)' = (f' \circ u) \times u'}$$

À partir de là, on obtient sans peine les résultats suivants :

Fonction	Dérivée	Intervalle	Conditions
u^n	$nu^{n-1}u'$	I	$n \in \mathbb{N}$
u^n	$nu^{n-1}u'$	$\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ $\forall x \in \mathrm{J}, u(x) \neq 0$	$n \in \mathbb{Z}_-^*$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ $\forall x \in \mathrm{J}, u(x) \neq 0$	
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ $\forall x \in \mathrm{J}, u(x) > 0$	
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$	$\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ $\forall x \in \mathrm{J}, u(x) > 0$	
e^u	$u'e^u$	I	
$\sin u$	$u' \cos u$	I	
$\cos u$	$-u' \sin u$	I	
$\tan u$	$(1 + \tan^2 u)u'$	$\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ $\exists k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathrm{J}, u(x) \in]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi[$	

4.4. DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS RÉCIPROQUES

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ; la restriction de f à l'intervalle I est alors bijective de I sur $f\langle \mathrm{I} \rangle$. Si f est, de surcroît, dérivable sur I, qu'en est-il de la bijection réciproque f^{-1} ?

THÉORÈME

Sous les hypothèses précédentes, soit x un élément de I, et y son image par f. Si le réel $f'(x)$ n'est pas nul, la bijection réciproque f^{-1} est dérivable au point y, et on a l'égalité :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Exemple
Soit f la restriction à $[0, +\infty[$ de la fonction carré $x \mapsto x^2$, qui est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. L'égalité $f'(x) = 0$ équivaut à $x = 0$, donc la fonction f^{-1} est dérivable en tout point y de $\mathbb{R}_+$ à l'exception de $y = f(0) = 0$, et on a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

On retrouve ainsi l'expression de la dérivée de la fonction racine carrée.

4.5. DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f' est alors également définie sur I et peut être à son tour dérivable sur cet intervalle. Si tel est le cas, on note f'' la fonction dérivée de f', et on l'appelle **fonction dérivée seconde** de f.

On définit de même les fonctions $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, ..., $f^{(n)}$, respectivement dérivées troisième, quatrième et n-ième de f.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$ sur I

• Lorsqu'une fonction f est continue sur un intervalle I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I.

• Lorsqu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I, et que sa dérivée f' est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

• Lorsqu'une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I, et que sa dérivée seconde f'' est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

• Plus généralement, n étant un entier naturel, lorsqu'une fonction f est n fois dérivable sur un intervalle I, et que sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Lorsqu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, on peut donc affirmer que f, f', f'', ..., $f^{(n)}$ existent et sont toutes continues sur I.

Enfin, on dit qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier n ; il revient au même de dire que f possède sur I des dérivées à tout ordre, et que celles-ci sont toutes continues sur I.

Les fonctions polynômes, sinus, cosinus et exponentielle sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; la fonction logarithme népérien est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Formule de Leibniz

THÉORÈME

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un même intervalle I. La dérivée n-ième du produit uv est donnée par :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Dans cette formule, dont la démonstration se fait par récurrence, on pose, par convention : $u^{(0)} = u$ et $v^{(0)} = v$. Le lecteur est invité à examiner les cas $n = 0$ et $n = 1$.

5. APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

5.1. DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

Le théorème qui suit est d'un emploi constant depuis la classe de première... sans avoir jamais été démontré.

THÉORÈME

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

• **Si on a $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de I, alors f est croissante sur I.**

• **Si on a $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de I, alors f est décroissante sur I.**

• **Si on a $f'(x) = 0$ pour tout x de I, alors f est constante sur I.**

On peut préciser le théorème comme suit :

- Si on a $f'(x) > 0$ pour tout x de I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si on a $f'(x) < 0$ pour tout x de I, alors f est strictement décroissante sur I.

Cependant, $f'(x)$ peut parfaitement s'annuler "ponctuellement" sans changer de signe : cela ne supprime pas la stricte monotonie de f, comme le montre l'exemple de la fonction strictement croissante $x \mapsto x + \sin x$ dont la dérivée $x \mapsto 1 + \cos x$ s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.

5.2. INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS

THÉORÈME

Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle $\mathrm{I} = [a,b]$, et telle que : $\exists (m, \mathrm{M}) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [a,b], m \leqslant f'(t) \leqslant \mathrm{M}$
(autrement dit, f' est bornée sur $[a,b]$).
Alors : $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$**.**

Dans la pratique, on utilise souvent ce théorème pour prouver la convergence de certaines suites définies par une récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, en utilisant l'énoncé suivant :

THÉORÈME

Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle I, et telle que :
$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathrm{I}, |f'(t)| \leqslant \mathrm{M}$
Alors : $\forall (x,x') \in \mathrm{I}^2, \quad |f(x) - f(x')| \leqslant \mathrm{M}|x - x'|$

5.3. CONVEXITÉ

Une fonction est dite convexe (resp. concave) sur un intervalle I lorsque sa représentation graphique, dans un repère orienté "normalement", est située "en-dessous" (resp. "au-dessus") de toutes ses cordes (et, si la fonction est dérivable sur I, "au-dessus" (resp. "en-dessous") de toutes ses tangentes sur cet intervalle). Il revient au-même de dire que la courbe d'une fonction convexe est "tournée" vers le haut tandis que celle d'une fonction concave est "tournée" vers le bas.

THÉORÈME

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
- **Si :** $\forall t \in \mathrm{I}, \quad f''(t) \geqslant 0$**, alors f est convexe sur I.**
- **Si :** $\forall t \in \mathrm{I}, \quad f''(t) \leqslant 0$**, alors f est concave sur I.**

Exemple
La fonction logarithme népérien est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$, et :

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{donc} \qquad (\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Il en résulte que la fonction logarithme népérien est concave sur $]0,+\infty[$.

Le lecteur pourra chercher comment en déduire la relation :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \ln x \leqslant x - 1.$$

6. PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION

1. Ensemble de définition
- parité, imparité et périodicité éventuelles $\rightarrow$ ensemble d'étude.

2. Limites aux bornes
- Il s'agit des bornes"ouvertes" des intervalles composant $\mathcal{D}(f)$; si la fonction est définie en l'une des bornes de $\mathcal{D}(f)$, la limite sera étudiée avec la continuité de f.
- Signaler les éventuelles asymptotes apparaissant à ce stade.
- Signaler un éventuel prolongement pas continuité apparaissant à ce stade.

3. Continuité
- Par application des théorèmes généraux sur la continuité, on détermine les intervalles sur lesquels on est sûr que f est continue.
- On s'occupe ensuite des éventuels cas litigieux (présence de parties entières, ou fonction définie "par morceaux") en recherchant limite à gauche et/ou à droite et en comparant avec la valeur prise.

4. Dérivabilité
- Par application des théorèmes généraux sur la dérivabilité, on détermine les intervalles sur lesquels on est sûr que f est dérivable.
- On s'occupe ensuite des éventuels cas litigieux (présence de racines carrées ou de valeurs absolues, ou fonction définie “par morceaux”) en recherchant, selon le cas :
    - la limite à gauche et/ou à droite du taux de variation de f.
    - la limite de $f'(x)$ au(x) point(s) concerné(s).

5. Sens & tableau de variation
L'étude du signe de la dérivée est en général le meilleur moyen d'obtenir le sens de variation, mais il y a souvent plus rapide.
Tous les résultats des paragraphes 1 à 5 sont résumés dans un tableau ; on en vérifie la cohérence.

6. Options...
Asymptote oblique.
Si la limite de $f(x)$ quand x tend vers plus l'infini ou moins l'infini est elle-même infinie, il peut y avoir une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.
Deux cas se présentent :
- l'asymptote est ”évidente”, soit qu'elle figure dans l'énoncé, soit que la forme de $f(x)$ la laisse deviner aisément (exemple : $f(x) = 2x - 3 + e^{-x}$).
- elle ne l'est pas : on recherche alors la limite du quotient $\frac{f(x)}{x}$. Si elle est infinie, il n'y a pas d'asymptote (on parle de branche parabolique de direction asymptotique verticale). Si elle est finie et égale au réel a, on recherche la limite de $f(x)-ax$. Si celle-ci est infinie, il n'y a pas d'asymptote (branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$). Si elle est finie et égale au réel b, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe.

On étudie la position de la courbe par rapport à son asymptote en étudiant le signe de la différence $f(x) - (ax + b)$.
Convexité.
Lorsque $f''(x)$ est aisément calculable, l'étude de son signe peut s'avérer utile pour préciser la convexité de la courbe.

7. Représentation graphique
- Choisir judicieusement les unités, si l'énoncé ne les impose pas.
- ”Centrer” intelligemment le repère dans la feuille.
- Représenter :
    - les asymptotes.
    - les tangentes horizontales (points d'annulation de la dérivée).
    - les demi-tangentes au(x) point(s) d'arrêt et point(s) anguleux.
- Placer quelques points pour préciser le tracé là où cela semble nécessaire.
- Tracer la courbe de sorte qu'elle soit harmonieuse et régulière.