

# PCSI EXERCICES DE MATHEMATIQUES R. FERREOL 07

à préparer sur feuille pour la rentrée

A. NE DEVANT POSER AUCUN PROBLEME À L'ARRIVÉE EN MATH SUP.

## I. CALCUL

1. : Simplifier les écritures suivantes ( $x$  est un réel et  $n$  un entier naturel):

$$\sqrt{x^2}; x.\text{signe}(x); \frac{(n+1)!}{n!}; \cos 2n\pi; \cos n\pi; \sin n\pi; 2^n+2^n; 2^n \cdot 2^n; (2^{2n-1} - 2^n + 1)(2^{2n-1} + 2^n + 1); (-1)^{-n}; (-1)^{n^3-6n+7}$$

2. : Rendre rationnel le dénominateur de  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ .

3. : Mettre sous forme de fraction irréductible : 0,424242... puis 1,3424242...

4. : Calculer les sommes ou produits :

(a)  $1 + 2 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 1$

(b)  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$

(c)  $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$

(d)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$

5. : Factoriser au maximum (il ne doit y avoir ni fractions, ni racines carrées, ni exposants) :

(a)  $6 - 6x + 3x(x-1) - x(x-1)(x-2)$

(b)  $6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$

(c)  $mx^2 - (1+m^2)x + m$

(d)  $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$

6. : Résoudre le système :  $\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 5 \end{cases}$

7. : Résoudre les inéquations :

(a)  $\frac{1}{x} > -1$

(b)  $-1 < \frac{1-x}{1+x} < 1$

(c)  $0 \leq \frac{x-1}{x+1} \leq 1$

8. : Montrer les égalités :

(a)  $a^{\ln b} = b^{\ln a}$

(b)  $3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

## II. FONCTIONS

9. : Sachant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ , déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .

10. : Connaissant les courbes de  $\ln$  et  $\exp$ , construire les courbes de  $x \mapsto \ln(x+1)$ ,  $x \mapsto \ln(1-x)$ ;  $x \mapsto 1 - e^x$  (indiquer la transformation utilisée pour passer des courbes de départ aux nouvelles).

11. : Même question pour passer de la courbe de  $\cos$  aux courbes de  $x \mapsto \cos \frac{x}{2}$ ,  $x \mapsto \cos 2x$ ,  $x \mapsto \cos^2 x$  (linéariser).

12. : Démontrer que les courbes de  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  et de  $x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$  peuvent se tracer à l'aide du compas.
13. : Étudier et tracer en moins de 5 minutes chacune :  $x \mapsto x + \frac{1}{x}$  ;  $x \mapsto x \ln x$  .
14. : Calculer la dérivée de  $f : x \mapsto x^{x^2}$ , de  $g : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ .

### III. DÉMONSTRATIONS CLASSIQUES.

Vous êtes censés connaître les théorèmes suivants, mais connaissez-vous leur *démonstration* ?

15. : La somme des mesures en degrés d'un triangle vaut  $180^\circ$ .
16. : L'aire d'un triangle vaut la moitié du produit de la longueur d'un côté par la hauteur correspondante.
17. : L'aire d'un losange est la moitié du produit des longueurs de ses diagonales.
18. : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.
19. : Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
20. : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.
21. : Les trois médianes d'un triangle sont concourantes et se coupent aux  $2/3$  de leurs longueur.
22. : Si un triangle  $ABC$  est inscrit dans un cercle de centre  $O$ , avec  $O$  et  $A$  du même côté de  $(BC)$ ,  $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$ .
23. :  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ .
24. :  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ .
25. : La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne arithmétique des termes extrêmes.
26. :  $1 + x + \dots + x^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$  .
27. :  $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  ou bien  $\frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , puis déduire l'une de l'autre.
28. :  $\sqrt{2}$  n'est pas rationnel.
29. : Il existe une infinité de nombres premiers.

### B . POUR REFLECHIR

30. On pose  $P_n(x) = (x+1)(x^2+1)(x^4+1)\dots(x^{2^n}+1)$  ;
- (a) Simplifier  $(x-1)P_n(x)$ .
- (b) En déduire la forme développée de  $P_n(x)$ .
- (c) En déduire que si  $F_n = 2^{2^n} + 1$ ,  $F_n = F_0 F_1 \dots F_{n-1} + 2$ .
- (d) En déduire que deux nombres  $F_n$  et  $F_p$  distincts sont premiers entre eux.
- (e) En déduire qu'il y a un nombre infini de nombres premiers.

Voici un livre que vous pouvez potasser si vous voulez vous préparer pour la rentrée :

R. Escoffier : Réussir ses maths en prépa, Ellipses.