PCSI EXERCICES DE MATHEMATIQUES R. FERREOL 07

à préparer sur feuille pour la rentrée

A. NE DEVANT POSER AUCUN PROBLEME À L'ARRIVÉE EN MATH SUP.
I. CALCUL

1. : Simplifier les écritures suivantes (x est un réel et n un entier naturel):
$\sqrt{x^2}$; $x.\text{signe}(x)$; $\dfrac{(n+1)!}{n!}$; $\cos 2n\pi$; $\cos n\pi$; $\sin n\pi$; 2^n+2^n; $2^n.2^n$; $\left(2^{2n-1}-2^n+1\right)\left(2^{2n-1}+2^n+1\right)$; $(-1)^{-n}$; $(-1)^{n^3-6n+7}$
2. : Rendre rationnel le dénominateur de $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.
3. : Mettre sous forme de fraction irréductible : $0,424242...$ puis $1,3424242...$
4. : Calculer les sommes ou produits :
   (a) $1+2+..+(n-1)+n+(n-1)+..2+1$
   (b) $1+3+5+..+2n-1$
   (c) $1+2+4+..+2^n$
   (d) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+..+\dfrac{1}{2^n}$
5. : Factoriser au maximum (il ne doit y avoir ni fractions, ni racines carrées, ni exposants) :
   (a) $6-6x+3x(x-1)-x(x-1)(x-2)$
   (b) $6x^3+5x^2-3x-2$
   (c) $mx^2-\left(1+m^2\right)x+m$
   (d) $4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2$
6. : Résoudre le système : $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=5 \end{cases}$
7. : Résoudre les inéquations :
   (a) $\dfrac{1}{x}>-1$
   (b) $-1<\dfrac{1-x}{1+x}<1$
   (c) $0\leqslant\dfrac{x-1}{x+1}\leqslant 1$
8. : Montrer les égalités :
   (a) $a^{\ln b}=b^{\ln a}$
   (b) $3.5.7...(2n-1)=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$

II. FONCTIONS

9. : Sachant $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
10. : Connaissant les courbes de ln et exp, construire les courbes de $x\mapsto\ln(x+1)$, $x\mapsto\ln(1-x)$; $x\mapsto 1-e^x$ (indiquer la transformation utilisée pour passer des courbes de départ aux nouvelles).
11. : Même question pour passer de la courbe de cos aux courbes de $x\mapsto\cos\dfrac{x}{2}$, $x\mapsto\cos 2x$, $x\mapsto\cos^2 x$ (linéariser).

12\. : Démontrer que les courbes de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et de $x \mapsto \sqrt{x\,(1-x)}$ peuvent se tracer à l'aide du compas.

13\. : Étudier et tracer en moins de 5 minutes chacune : $x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto x \ln x$.

14\. : Calculer la dérivée de $f : x \mapsto x^{x^2}$, de $g : x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$.

III. DÉMONSTRATIONS CLASSIQUES.
Vous êtes censés connaître les théorèmes suivants, mais connaissez-vous leur *démonstration* ?

15\. : La somme des mesures en degrés d'un triangle vaut 180°.

16\. : L'aire d'un triangle vaut la moitié du produit de la longueur d'un côté par la hauteur correspondante.

17\. : L'aire d'un losange est la moitié du produit des longueurs de ses diagonales.

18\. : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

19\. : Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

20\. : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.

21\. : Les trois médianes d'un triangle sont concourantes et se coupent aux 2/3 de leurs longueur.

22\. : Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle de centre O, avec O et A du même côté de (BC), $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

23\. : $\cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

24\. : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

25\. : La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne arithmétique des termes extrêmes.

26\. : $1 + x + ... + x^n = \begin{cases} n+1 \text{ si } x = 1 \\ \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} \text{ si } x \neq 1 \end{cases}$.

27\. : $\dfrac{\ln x}{x} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ ou bien $\dfrac{e^x}{x} \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$, puis déduire l'une de l'autre.

28\. : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

29\. : Il existe une infinité de nombres premiers.

B . POUR REFLECHIR

30\. On pose $P_n(x) = (x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)\cdots\left(x^{2^n}+1\right)$;

(a) Simplifier $(x-1)\,P_n\,(x)$.
(b) En déduire la forme développée de $P_n\,(x)$.
(c) En déduire que si $F_n = 2^{2^n} + 1$, $F_n = F_0 F_1 ... F_{n-1} + 2$.
(d) En déduire que deux nombres F_n et F_p distincts sont premiers entre eux.
(e) En déduire qu'il y a un nombre infini de nombres premiers.

Voici un livre que vous pouvez potasser si vous voulez vous préparer pour la rentrée :
R. Escoffier : Réussir ses maths en prépa, Ellipses.